4 Optimierung von Filterbänken für die Teilbandcodierung

Die in dieser Arbeit vorgestellte Optimierung der Filterbänke stützt sich auf die in Kapitel 3 eingeführten Modelle ab. Dabei werden Redundanz und Irrelevanz zusammen maximal ausgenutzt, um die Datenrate zu minimieren. Die Freiheitsgrade der Optimierung bestehen in den Parametern der Struktur der Filterbank und den Parametern der Übertragungsfunktionen. Die Quantisierung hängt von diesen Freiheitsgraden ab. Die Freiheitsgrade werden im Hinblick auf eine spätere numerische Behandlung diskretisiert und der Suchbereich für die Optimierung wird eingeschränkt.

Zur Optimierung der Struktur der Filterbank und der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter wird die Rate–Distortion–Funktion als Gütekriterium verwendet. Wie im folgenden gezeigt wird, ist eine geschlossene analytische Lösung dieses Optimierungsproblems jedoch aufgrund der Komplexität der Aufgabenstellung nicht möglich. Selbst für eine allgemeine numerische Lösung ist der Rechenaufwand trotz bereits eingeschränkter Freiheitsgrade noch zu groß. Daher werden die Freiheitsgrade der Optimierung weiter eingeschränkt, wozu eine zweischrittige Optimierungsstrategie verfolgt wird. In einem ersten Schritt wird mit Hilfe einer Abschätzung eine Teilmenge von Strukturen, die nicht die optimale Struktur beinhalten kann, erkannt und von den weiteren Untersuchungen ausgeschlossen. Dadurch wird die Lösungsmenge der möglichen Filterbankstrukturen reduziert. Für jede der in der Lösungsmenge verbleibenden Filterbankstrukturen werden in einem zweiten Schritt die Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter bei vorgegebener Anzahl der Filterkoeffizienten numerisch optimiert und abschließend das System mit minimaler Datenrate bestimmt.

Die Freiheitsgrade der Optimierung werden in Abschnitt 4.1 dargelegt. Der Lösungsansatz dieser Optimierung wird in Abschnitt 4.2 erläutert. Abschnitt 4.3 beschreibt die Optimierung der Struktur der Filterbank mit den daraus resultierenden Ergebnissen und damit den ersten Schritt der Optimierung. Mit der Optimierung der Übertragungsfunktionen wird in Abschnitt 4.4 der zweite Schritt vorgestellt, der das System mit minimaler Datenrate als Lösung ergibt.

4.1 Freiheitsgrade der Filterbank

Die in dieser Arbeit untersuchten Filterbänke sind, wie bereits in Abschnitt 2.1 erläutert, stets zweidimensional, verwenden separierbare Teilbandfilter und besitzen die Eigenschaft der exakten Rekonstruktion. Die Freiheitsgrade derartiger Filterbänke lassen sich unterteilen in die Freiheitsgrade der Struktur der Filterbank (Abschnitt 4.1.1) und die Freiheitsgrade der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter (Abschnitt 4.1.2).

4.1.1 Freiheitsgrade der Struktur der Filterbank

Die Freiheitsgrade der Struktur der Filterbank bestehen in der Anzahl *N* der Teilbänder, deren Bandbreiten $B_{n,x}$ bzw. $B_{n,y}$ gemäß Gll. (2.45) – (2.46) sowie deren Mittenfrequenzen $f_{x,n,m}$ bzw. $f_{y,n,m}$. Mit den Bandbreiten $B_{n,x}$ bzw. $B_{n,y}$ sowie den Mittenfrequenzen $f_{x,n,m}$ bzw. $f_{y,n,m}$ ist der Frequenzbereich $\Delta f_{x,n}$ bzw. $\Delta f_{y,n}$ des *n*-ten Teilbandes gemäß Gll. (2.47) und (2.48) festgelegt. Die Freiheitsgrade der Struktur der Filterbank sind durch die Freiheitsgrade der Bandaufteilung gegeben, während die Festlegung, ob die Bandaufteilung kaskadiert oder einstufig realisiert wird, die Freiheitsgrade der Übertragungsfunktionen beeinflußt (vgl. Abschnitt 4.1.2).

Für die numerische Behandlung der Optimierung muß die Anzahl der möglichen Bandbreiten auf eine endliche Menge reduziert werden. Der gesamte Frequenzbereich des Eingangssignals wird dazu in x– und y–Richtung in jeweils 16 gleich große Frequenzstufen diskretisiert. Das ermöglicht eine gleichförmige Bandaufteilung in maximal

$$N_{max} = 256$$
 (4.1)

Teilbänder und Bandbreiten von

$$B_{n,x} = l \cdot \frac{0.5}{16} \qquad l \in \mathbb{N} \quad \wedge l \leq 16 \tag{4.2}$$

bzw.

$$B_{n,y} = m \cdot \frac{0.5}{16} \qquad m \in \mathbb{N} \quad \wedge m \leq 16.$$

$$(4.3)$$

Bandaufteilungen lassen sich gemäß Abschnitt 2.1.3 in gleichförmige und ungleichförmige unterteilen. Eine Untersuchung aller möglichen Bandaufteilungen des diskretisierten Frequenzbereichs ist aus Aufwandsgründen nicht möglich. Um einen Vergleich der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse mit bekannten kaskadierten Realisierungen wie der Wavelet–Struktur und mit gleichförmigen Bandaufteilungen zu ermöglichen, werden im weiteren nur derartige Bandaufteilungen untersucht, die sich durch Kaskadierung gleichförmiger zweidimensionaler Vierbandaufteilungen erzielen lassen. Durch eine solche Kaskadierung kann jedes Teilbandsignal in vier weitere Teilbandsignale unterteilt werden, d.h. die Anzahl *N* der Teilbandsignale erhöht sich bei jeder Vierbandaufteilung um drei. Somit lassen sich Strukturen mit

$$N = 3i + 1, \ i \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

Teilbandsignalen realisieren, wobei i die Anzahl der Vierbandaufteilungen angibt.

Die Anzahl der möglichen Bandaufteilungen bzw. Strukturen kann wie folgt berechnet werden. Bei der ersten Bandaufteilung entstehen immer vier Teilbandsignale, d.h. die Anzahl der Freiheitsgrade der Filterbankstruktur bei Aufspaltung in vier Teilbandsignale beträgt

$$F_{S,4} = \begin{pmatrix} 4\\0 \end{pmatrix} = 1.$$
 (4.5)

Jedes dieser Teilbandsignale kann weiter aufgespalten werden, so daß insgesamt

$$F_{S,16} = \sum_{j=1}^{4} \binom{4}{j} = 2^4 - 1 \tag{4.6}$$

verschiedene Bandaufteilungen existieren, bei denen mindestens ein Teilbandsignal die Bandbreite $B_{n,x} = B_{n,y} = 0.5/4$ besitzt, die bei einer gleichförmigen Bandaufteilung in 16 Teilbandsignale vorliegt.

Bei jeder dieser Bandaufteilungen entstehen durch weitere Vierbandaufteilung der Teilbandsignale mit $B_{n,x} = B_{n,y} = 0.5/4$ neue Bandaufteilungen, bei denen mindestens ein Teilbandsignal die Bandbreite $B_{n,x} = B_{n,y} = 0.5/8$ besitzt, die bei einer gleichförmigen Bandaufteilung in 64 Teilbandsignale erreicht wird. Das führt auf die zusätzliche Anzahl von

$$F_{S,64} = \sum_{j=1}^{4} \binom{4}{j} \sum_{k=1}^{4j} \binom{4j}{k} = \sum_{j=1}^{4} \binom{4}{j} (2^{4j} - 1)$$
(4.7)

Bandaufteilungen.

Durch eine weitere Vierbandaufteilung der Teilbandsignale mit $B_{n,x} = B_{n,y} = 0.5/8$ werden zusätzlich

$$F_{S,256} = \sum_{j=1}^{4} \binom{4}{j} \sum_{k=1}^{4j} \binom{4j}{k} \sum_{l=1}^{4k} \binom{4k}{l} = \sum_{j=1}^{4} \binom{4}{j} \sum_{k=1}^{4j} \binom{4j}{k} (2^{4k} - 1)$$
(4.8)

neue Bandaufteilungen erreicht.

Insgesamt sind also

$$F_{S} = F_{S,4} + F_{S,16} + F_{S,64} + F_{S,256} = 1336096$$
(4.9)

verschiedene Bandaufteilungen möglich.

Alle hiermit darstellbaren Bandaufteilungen genügen den Bedingungen

$$f_{x,n,m} \pm \frac{B_{n,x}}{2} = l \cdot B_{n,x} \qquad l \in \mathbb{N}$$
(4.10)

bzw.

$$f_{y,n,m} \pm \frac{B_{n,y}}{2} = m \cdot B_{n,y} \qquad m \in \mathbb{N}$$
(4.11)

und

$$B_{n,x} = B_{n,y}.\tag{4.12}$$

Bandaufteilungen wie in Bild 4.1a) dargestellt sind damit möglich, Bandaufteilungen nach Bild 4.1b) jedoch nicht.





a) Beispiel für eine mögliche Bandaufteilung

b) Beispiel für eine nicht mögliche Bandaufteilung

4.1.2 Freiheitsgrade der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter

Die Freiheitsgrade der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter bestehen in den Filterkoeffizienten. Alle hier betrachteten zweidimensionalen Teilbandfilter sind separierbar, d.h. sie lassen sich jeweils in ein Horizontal– und ein Vertikalfilter zerlegen. In dieser Arbeit werden, wie in Abschnitt 2.1.1 erläutert, nur linearphasige Filter mit Aliasingkompensation betrachtet.

Eine Optimierung der Filterbank für jede beliebige Anzahl von Filterkoeffizienten ist wegen des damit verbundenen Rechenaufwands nicht durchführbar. In der Bildcodierung werden aufgrund von Realisierungsaspekten [32] immer Teilbandfilter mit einer relativ kleinen Anzahl von Koeffizienten eingesetzt. In dieser Arbeit werden Filter mit Impulsantwortfunktionen betrachtet, deren Länge *L* auf

$$L \le 32 \tag{4.13}$$

beschränkt ist. Im Falle der im weiteren behandelten kaskadierten Realisierungen bezieht sich *L* auf die resultierende Impulsantwortfunktion eines Teilbandsignals.

Bei vorgegebener Länge L der Impulsantwortfunktion und Teilbandanzahl N wird die Anzahl der Freiheitsgrade für die Übertragungsfunktionen noch dadurch beeinflußt, wie die Übertragungsfunktion realisiert wird. Dazu wird im folgenden zwischen der kaskadierten und der einstufigen Realisierung unterschieden.

Bei allen ungleichförmigen Bandaufteilungen wird im folgenden eine kaskadierte Realisierung vorausgesetzt. Bei allen gleichförmigen Bandaufteilungen kann immer eine kaskadierte oder einstufige Realisierung gewählt werden. Da die einstufige Realisierung bei gleicher Impulsantwortlänge jedoch über mehr Freiheitsgrade verfügt – vgl. Anhang B –, werden im folgenden gleichförmige Bandaufteilungen immer als einstufig realisiert angenommen.

Eine *eindimensionale* Filterbank mit *gleichförmiger* Bandaufteilung in N_{1D} Teilbandsignale und linearphasigen Teilbandfiltern mit jeweils *L* Filterkoeffizienten besitzt die Anzahl von

$$F_{\ddot{U},gl,1D} = \left(\frac{L}{N_{1D}} + 1\right) \frac{N_{1D}^2}{4}$$
(4.14)

Freiheitsgraden für die Übertragungsfunktionen [11].

Bei zweidimensionalen Teilbandfiltern besitzt die einstufige Realisierung mit gleichförmiger Bandaufteilung

$$N = N_{1D}^2$$
(4.15)

Teilbandsignale. Aufgrund der Separierbarkeit berechnet sich mit Hilfe von Gl. (4.14) die Anzahl der Freiheitsgrade für die Übertragungsfunktionen durch Addition der Freiheitsgrade der horizontalen und vertikalen Filterung zu

$$F_{\ddot{U},gl}(L,N) = F_{\ddot{U},gl,x}(L,N) + F_{\ddot{U},gl,y}(L,N) = \left(\frac{L}{\sqrt{N}} + 1\right)\frac{N}{2}.$$
 (4.16)

Eine gleichförmige zweidimensionale Vierbandaufteilung hat also die Freiheitsgrade

$$F_{\ddot{U},gl,x}(L,2) + F_{\ddot{U},gl,y}(L,2) = \left(\frac{L}{2} + 1\right)2.$$
(4.17)

Für eine *zweidimensionale* Filterbank mit *ungleichförmiger* Bandaufteilung in *N* Teilbänder ergibt sich mit Gl. (4.14) die Anzahl der Freiheitsgrade für die Übertragungsfunktionen bei einer kaskadierten Realisierung durch Addition der Freiheitsgrade aller gleichförmigen zweidimensionalen Vierbandaufteilungen zu

$$F_{\ddot{U},ungl}(L,N) = \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{3}} \left(F_{\ddot{U},gl,x}(L_i,2) + F_{\ddot{U},gl,y}(L_i,2) \right) = 2 \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{3}} \left(\frac{L_i}{2} + 1 \right).$$
(4.18)

Dabei gibt L_i die Anzahl der Filterkoeffizienten eines Teilbandfilters in der *i*-ten Vierbandaufteilung an. Die Anzahl der Vierbandaufteilungen läßt sich aus Gl. (4.4) berechnen.

4.2 Lösungsansatz für die Optimierung der Filterbank

Die in dieser Arbeit betrachtete Optimierung einer Filterbank im Hinblick auf eine gute Ausnutzung der Redundanz- und Irrelevanzreduktion läßt sich formulieren als Minimierung der Datenrate R_{TBC} aller Teilbandsignale. Die Datenrate R_{TBC} war in Abschnitt 3.2.3 zu

$$R_{TBC} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2M_n} Max \left[ld\left(\frac{\sigma_{s,n}^2}{\sigma_{q,n}^2}\right), 0 \right] + K_{pdf} + K_{psd}$$
(3.48)

bestimmt worden, wobei die Varianz $\sigma_{s,n}^2$ jedes Teilbandsignals sich zu

$$\sigma_{s,n}^2 = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} S_{ss,sep,n}(f_x, f_y) df_x df_y$$
(3.40)

und das Leistungsdichtespektrum $S_{ss,sep,n}(f_x, f_y)$ des Teilbandsignals vor Unterabtastung sich zu

$$S_{ss,sep,n}(f_x, f_y) = S_{ss,sep}(f_x, f_y) \cdot \left| H_n(f_x, f_y) \right|^2$$
(3.41)

berechnet. Die Varianz $\sigma_{q,n}^2$ des Quantisierungsfehlersignals wird individuell für jedes Teilbandsignal so gewählt, daß der resultierende Codierfehler an oder unterhalb der Sichtbarkeitsschwelle liegt. Die Datenrate R_{TBC} soll also minimal werden unter der Nebenbedingung

$$\underset{f_x,f_y}{Min} \left\{ S_{qq, max}(f_x, f_y) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{M_n} \sigma_{q,n}^2 \left| G_n(f_x, f_y) \right|^2 \right\} = 0.$$
(4.19)

Das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion des *n*-ten Analysefilters berechnet sich gemäß Gl. (2.43) wegen der Separierbarkeit der Filter zu

$$|H_n(f_x, f_y)|^2 = |H_{nx}(f_x)|^2 \cdot |H_{ny}(f_y)|^2.$$
(4.20)

Für die Synthesefilter gilt gemäß Gl. (2.44) sinngemäß dasselbe.

Durch Einsetzen der Gll. (3.40), (3.41) und (4.20) in Gl. (3.48) ergibt sich eine Gleichung, die nach den Freiheitsgraden gemäß [11] minimiert werden muß, wobei die Nebenbedingung gemäß Gl. (4.19) eingehalten werden muß. Inwieweit sich dies geschlossen lösen läßt, wird im folgenden Abschnitt beispielhaft untersucht.

4.2.1 Beispiel für einen geschlossenen Lösungsansatz

Der sehr einfache Fall einer eindimensionalen Filterbank mit

$$N = 2 \tag{4.21}$$

Teilbandsignalen und einer gleichförmigen Bandaufteilung mit den Unterabtastfaktoren

$$M_0 = M_1 = 2 \tag{4.22}$$

sowie der Anzahl der Filterkoeffizienten

$$L = 4 \tag{4.23}$$

soll optimiert werden.

Als weitere Vereinfachung werden in diesem Beispiel ausschließlich Prädiktionsfehlersignale als Eingangssignal der Filterbank angenommen, deren spektrale Leistungsdichte durch ein weißes Leistungsdichtespektrum mit

$$S_{ss}(f_x) \equiv 1 \quad und \ S_{ss}(f_x) > S_{qq}(f_x) \tag{4.24}$$

angenähert wird. Dadurch vereinfacht sich Gl. (3.48) zu

$$R_{TBC} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{1} ld \left(\frac{\sigma_{s,n}^2}{\sigma_{q,n}^2} \right) + K_{pdf} + K_{psd}.$$
 (4.25)

Durch Einsetzen von Gll. (3.41) und (4.24) in Gl. (3.40) wird in diesem Fall

$$\sigma_{s,n}^2 = \int_{-0.5}^{0.5} |H_n(f_x)|^2 df_x. \qquad (4.26)$$

Gl. (4.26) stellt eine Beziehung zwischen den Varianzen der Teilbandsignale und den Übertragungsfunktionen der Analysefilter her. Mit den Gll. (2.16), (2.19) und (2.23)–(2.26) lassen sich die Übertragungsfunktionen über die Kreuzgliedkoeffizienten k_1 und k_3 sowie den Verstärkungsfaktor *d* darstellen, so daß sich insgesamt die Varianzen der Teilbandsignale ergeben zu

$$\sigma_{s,0}^2 = 2(1+k_3)^2(1+k_1^2)$$
(4.27)

und

$$\sigma_{s,1}^2 = 2d^2 (1 - k_3)^2 (1 + k_1^2).$$
(4.28)

Zur Minimierung von Gl. (4.25) müssen nur die Argumente des Logarithmus betrachtet werden, die in den Ausdruck

$$R' = \frac{\sigma_{s,0}^2 \cdot \sigma_{s,1}^2}{\sigma_{q,0}^2 \cdot \sigma_{q,1}^2}$$
(4.29)

zusammengefaßt werden können. Mit Gll. (4.27) und (4.28) gilt hierfür

$$R' = \frac{4d^2(1+k_3)^2(1-k_3)^2(1+k_1^2)^2}{\sigma_{q,0}^2 \sigma_{q,1}^2} \quad .$$
(4.30)

Dabei ist gemäß Gl. (4.19) die Nebenbedingung

$$\underset{f_x f_y}{\text{Min}} \left\{ S_{qq, \max(f_x, f_y)} - \frac{1}{2} \left(\sigma_{q, 0}^2 \left| G_0(f_x, f_y) \right|^2 + \sigma_{q, 1}^2 \left| G_1(f_x, f_y) \right|^2 \right) \right\} = 0$$
(4.31)

einzuhalten, wobei in diesem Beispiel

$$\begin{aligned} \left|G_{0}(f_{x})\right|^{2} &= \frac{1}{2\left(1-k_{1}^{2}\right)^{2}\left(1-k_{3}^{2}\right)^{2}} \\ &\cdot \left[\left(1-k_{3}\right)^{2}\left\{\left(1+k_{1}^{2}\right)+k_{1}(2-k_{1})\cos(2\pi f_{x})-4k_{1}\cos(4\pi f_{x})\right\}^{(4.32)} \right. \\ &\left.+8\left(1+k_{3}\right)^{2}\cos(6\pi f_{x})\right] \end{aligned}$$

und

$$|G_{1}(f_{x})|^{2} = \frac{\left(1+k_{3}\right)^{2}}{2\left(1-k_{1}^{2}\right)^{2}\left(1-k_{3}^{2}\right)^{2}d^{2}}$$

$$\cdot \left\{\left(1+k_{1}^{2}\right)-k_{1}(2+k_{1})\cos(2\pi f_{x})+2k_{1}\cos(4\pi f_{x})+\cos(6\pi f_{x})\right\}$$

$$(4.33)$$

gilt. Somit ist hier eine nichtlineare Gleichung unter einer nichtlinearen, impliziten Nebenbedingung zu minimieren, was sich mit bekannten Verfahren geschlossen nicht lösen läßt.

4.2.2 Gewählter numerischer Lösungsansatz

Wie die Herleitungen in Abschnitt 4.2.1 zeigten, ist bereits das einfache Beispiel mit N = 2 und L = 4 einer geschlossenen Optimierung schwer zugänglich. Aus diesem

Grunde wird die Optimierung numerisch durchgeführt. Eine direkte numerische Optimierung müßte von einer Lösungsmenge ausgehen, die alle 1336096 möglichen Strukturen gemäß Gl. (4.9), alle resultierenden Impulsantwortlängen $L \leq 32$ und alle möglichen Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter zuläßt. Der numerische Aufwand hierfür ist zu groß. Daher wird die Optimierung in die nacheinander durchgeführten Schritte der Optimierung der Filterbankstruktur gefolgt von der Optimierung der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter aufgespalten.

Im ersten Schritt, d.h. bei der Optimierung der Filterbankstruktur, wird beginnend mit N = 1 für wachsende Teilbandanzahlen bis N = 64 jeweils eine optimierte Bandaufteilung bestimmt. Die optimierte Bandaufteilung bei vorgegebener Teilbandanzahl Nist dadurch gekennzeichnet, daß der untere Grenzwert der Datenrate $R_{TBC,min}$ gemäß Gl. (3.54) unter der Nebenbedingung (3.57), daß der Codierfehler genau an der Sichtbarkeitsschwelle liegt, ein Minimum erreicht. Dabei bleibt der Einfluß der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter im ersten Schritt der Optimierung unberücksichtigt. Als Ergebnis des ersten Optimierungsschrittes ergibt sich, wie nachfolgend gezeigt wird, eine stark reduzierte Menge von Bandaufteilungen für den zweiten Schritt der Optimierung.

Im zweiten Schritt, d.h. bei der Optimierung der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter, wird für jede der nach dem ersten Schritt verbleibenden Bandaufteilungen jeweils derjenige Satz von Übertragungsfunktionen für verschiedene Impulsantwortlängen *L* bestimmt, der die kleinste Datenrate R_{TBC} gemäß Gl. (3.48) ermöglicht, wobei die Nebenbedingung (4.19), daß der Codierfehler an oder unterhalb der Sichtbarkeitsschwelle liegt, eingehalten werden muß.

4.3 Optimierung der Filterbankstruktur

Bei der Optimierung der Filterbankstruktur wird die große Anzahl der 1336096 möglichen Bandaufteilungen soweit eingeschränkt, daß die Optimierung der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter mit vertretbarem Aufwand durchgeführt werden kann. Mit Hilfe einer Abschätzung wird in diesem Abschnitt eine Teilmenge von Strukturen, die nicht die optimale Struktur beinhalten kann, erkannt und von den weiteren Untersuchungen ausgeschlossen. Im folgenden erläutert Abschnitt 4.3.1 die bei der Optimierung der Filterbankstruktur verfolgte Optimierungsstrategie, während die Ergebnisse dieses ersten Optimierungsschrittes in Abschnitt 4.3.2 vorgestellt werden.

4.3.1 Optimierungsstrategie

Wie in Abschnitt 4.1.1 erläutert wurde, werden in dieser Arbeit nur solche Filterbankstrukturen betrachtet, die sich auch durch Kaskadierung gleichförmiger zweidimensionaler Vierbandaufteilungen darstellen lassen. Damit lassen sich gemäß Gl. (4.4) Bandaufteilungen mit

$$N = 3i + 1, \ i \in \mathbb{N}$$

Teilbandsignalen realisieren. Die zu jedem i > 1 gehörige Teilbandanzahl tritt in mehr als einer Bandaufteilung auf. Bandaufteilungen mit gleicher Teilbandanzahl unterscheiden sich im allgemeinen hinsichtlich des unteren Grenzwerts der Datenrate $R_{TBC,min}$ gemäß Gl. (3.54). Aus der Menge der Bandaufteilungen mit Teilbandanzahl N wird nun diejenige bestimmt, die den kleinsten Wert für $R_{TBC,min}$ aufweist. Sie wird im folgenden als optimierte Bandaufteilung bezeichnet und ist in der Regel ungleichförmig. Die Anzahl der Filterkoeffizienten ist bei ihr zunächst noch beliebig.

Zur Beurteilung der Ergebnisse wird das Minimum der jeweils erreichten Datenrate $R_{TBC,min}$ als Funktion der Teilbandanzahl Naufgetragen. Diese Funktion wird anschließend für die Einschränkung der Lösungsmenge verwendet.

4.3.2 Optimierungsergebnisse

Für N = 1, 4, 7, ..., 64 wurde durch jeweilige Berechnung des theoretischen unteren Grenzwerts der Datenrate $R_{TBC,min}$ die optimierte Bandaufteilung bestimmt. Beispielhafte optimierte Bandaufteilungen für Prädiktionsfehler– und Originalsignale sind in den Bildern 4.2 und 4.3 dargestellt.



Bild 4.2 Optimierte Bandaufteilungen für Prädiktionsfehlersignale



Bild 4.3 Optimierte Bandaufteilungen für Originalsignale

Bild 4.4 zeigt den unteren Grenzwert der Datenrate $R_{TBC,min}$ in Abhängigkeit von der vorgegebenen Teilbandanzahl N zum einen für Prädiktionsfehlersignale und zum anderen für Originalsignale. Wie Bild 4.4 zeigt, sinkt erwartungsgemäß mit steigender Anzahl der Teilbandsignale der theoretische untere Grenzwert der Datenrate dieser optimierten Bandaufteilungen und nähert sich dem theoretischen unteren Grenzwert der Datenrate R_{min} von Bandaufteilungen mit hinreichend hoher Teilbandanzahl nach Gl. (3.49) an.

Aus Bild 4.4 geht weiter hervor, daß bis zu einer Anzahl von N = 16 Teilbandsignalen jede weitere Bandaufteilung den theoretischen unteren Grenzwert der Datenrate $R_{TBC,min}$ deutlich reduziert. Auch für N > 16 verringert sich dieser Grenzwert der Datenrate der optimierten Bandaufteilungen noch geringfügig. Er beträgt bei 64 Teilbandsignalen für Prädiktionsfehlersignale der Sequenz "BERT" 1.18 bit/pel und für Originalsignale 2.32 bit/pel und liegt damit lediglich um 0.07 bit/pel für Prädiktionsfehlersignale und um 0.02 bit/pel für Originalsignale über dem unteren Grenzwert der Datenrate R_{min} für Strukturen mit hinreichend hoher Teilbandanzahl. Deshalb wird in diesem Schritt der Optimierung keine Untersuchung für N > 64 durchgeführt, so daß Bandaufteilungen mit mehr als 64 Teilbandsignale in diesem Abschnitt nicht weiter untersucht werden.





b) Originalsignal

	$R_{TBC,min}$ der optimierten Bandaufteilungen
+	R _{TBC,min} der gleichförmigen Bandaufteilungen
×	$R_{TBC,min}$ der Wavelet–Struktur
	R_{min}

Zusätzlich sind in Bild 4.4 die Ergebnisse für gleichförmige Bandaufteilung und eine Wavelet–Struktur zum Vergleich eingetragen. Die Ergebnisse sind ergänzend nochmals in Tabellenform dargestellt (Tab. 4.1 und 4.2).

	R _{TBC,min} der Bandaufteilung [bit/pel]			
Ν	optimiert	Wavelet	gleichförmig	
13	1.21	1.25	_	
16	1.21	_	1.22	
64	1.18	_	1.19	

Tabelle 4.1 Unterer Grenzwert der Datenrate R_{TBC.min} für Prädiktionsfehlersignale

	R _{TBC,min} der Bandaufteilung [bit/pel]			
Ν	optimiert	Wavelet	gleichförmig	
13	2.46	2.74	—	
16	2.43	_	2.46	
64	2.32	_	2.34	

Tabelle 4.2 Unterer Grenzwert der Datenrate R_{TBC.min} für Originalsignale

Der theoretische untere Grenzwert der Datenrate $R_{TBC,min}$ für die optimierte Bandaufteilung mit 13 Teilbandsignalen liegt bei 1.21 bit/pel bzw. bei 2.46 bit/pel. Die in der Bildcodierung häufig vorgeschlagene ebenfalls ungleichförmige Wavelet–Struktur mit 13 Teilbandsignalen weist demgegenüber eine um 0.04 bit/pel bzw. um 0.28 bit/pel höhere Datenrate $R_{TBC,min}$ auf. Die ungleichförmige Wavelet–Struktur ist demzufolge bei Originalsignalen der in dieser Arbeit bestimmten ungleichförmigen optimierten Bandaufteilung deutlich unterlegen.

Da der theoretische untere Grenzwert $R_{TBC,min}$ bei den optimierten Bandaufteilungen mit N < 16 wesentlich höher liegt als bei den optimierten Bandaufteilungen mit $N \ge 16$, werden im folgenden die Bandaufteilungen mit N < 16 nicht weiter verfolgt.

Für N = 16 und N = 64 liegt jeweils der theoretische untere Grenzwert der Datenrate $R_{TBC,min}$ der optimierten Bandaufteilungen nur geringfügig unter dem der gleichförmigen Bandaufteilungen, wie Tab. 4.1 und 4.2 zeigen. Aufgrund dieses geringen Unterschiedes werden bei der Optimierung der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter nur die gleichförmigen Bandaufteilungen in Betracht gezogen, da sie, wie in Kapitel 4.1 dargelegt, bei gleicher Impulsantwortlänge *L* über eine größere Anzahl von Freiheitsgraden bzgl. der Übertragungsfunktionen verfügen als die kaskadiert realisierten ungleichförmigen Bandaufteilungen. In der so eingeschränkten Lösungsmenge verbleiben folglich die einstufig realisierten gleichförmigen Bandaufteilungen mit 16 oder mehr Teilbandsignalen.

4.4 Optimierung der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter

Nachdem im ersten Schritt der Optimierung die Anzahl der weiter zu untersuchenden Filterbankstrukturen reduziert wurde, soll in diesem Abschnitt die Optimierung der Übertragungsfunktionen mit ihren Ergebnissen vorgestellt werden. Ziel dieser Optimierung ist es, für die in Abschnitt 4.3 bestimmte eingeschränkte Lösungsmenge von Filterbankstrukturen jeweils denjenigen Satz von Übertragungsfunktionen zu bestimmen, der die Entropie des Eingangssignals weitestmöglich reduziert. Dabei wird immer gefordert, daß der Codierfehler die Sichtbarkeitsschwelle nicht überschreitet, so daß Redundanz– und Irrelevanz zusammen minimiert werden. Ein Vergleich der Optimierungsergebnisse für die verschiedenen Strukturen führt sodann zu je einem insgesamt optimalen System für Prädiktionsfehler– und Originalsignale.

Abschnitt 4.4.1 erläutert zunächst die Strategie zur Optimierung der Übertragungsfunktionen. In Abschnitt 4.4.2 werden anschließend die aus dieser Optimierung resultierenden Ergebnisse und die jeweils optimalen Systeme für Prädiktionsfehler– und Originalsignale vorgestellt.

4.4.1 Optimierungsstrategie

Für die Strukturen der eingeschränkten Lösungsmenge aus Abschnitt 4.3.2 werden im zweiten Schritt der Optimierung die Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter zusammen mit der Quantisierung der Teilbandsignale bezüglich Redundanz– und Irrelevanzreduktion optimiert. Wie bereits in Abschnitt 4.1.2 erläutert, beschränkt sich die Optimierung der Übertragungsfunktionen auf linearphasige Teilbandfilter.

Die im ersten Schritt der Optimierung ermittelten theoretischen unteren Grenzwerte der Datenrate $R_{TBC,min}$ der optimierten Strukturen gelten bei beliebiger Anzahl von Filterkoeffizienten und sind mit einer begrenzten Anzahl von Filterkoeffizienten nicht erreichbar. Als Folge einer begrenzten Koeffizientenanzahl vergrößert sich der Übergangsbereich der Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter. Das damit verbundene Aliasing vermindert die Redundanzreduktion. Dieser Effekt wird bei festgehaltener Impulsantwortlänge L mit steigender Anzahl von Teilbandsignalen immer ausgeprägter, so daß die erforderliche Datenrate für Teilbandfilter mit begrenzter Koeffizientenanzahl bei wachsender Teilbandanzahl wieder ansteigen kann. Es liegt dann ein echtes Minimum der Datenrate bei einer begrenzten Anzahl von Teilbandsignalen vor. Um dieses Minimum zu ermitteln, werden im zweiten Schritt der Optimierung die gleichförmigen Bandaufteilungen mit 16, 64 und 256 Teilbandsignalen betrachtet. Falls es zur Bestimmung des Minimums notwendig ist, wird zusätzlich die Bandaufteilung mit 4 bzw. 1024 Teilbandsignalen untersucht. Für mindestens drei gleichförmige Bandaufteilungen werden also die Übertragungsfunktionen der Teilbandfilter sowohl für Prädiktionsfehlersignale als auch für Originalsignale optimiert. Wie bereits in Abschnitt 4.1.2 erläutert, werden hier nur Filter mit Impulsantwortlängen L von maximal 32 untersucht.

Die Optimierung wird aus Aufwandsgründen jeweils für die Horizontal– und Vertikalfilter getrennt und damit eindimensional durchgeführt. Bei der Optimierung der Horizontalfilter $H_{nx}(f_x)$ wird als Optimierungskriterium die Datenrate R_{TBC} gemäß Gl. (3.48) für den eindimensionalen Fall

$$R_{TBC,x} = \sum_{nx=0}^{\sqrt{N}-1} \frac{1}{2M_{nx}} Max \left\{ ld\left(\frac{\sigma_{s,nx}^2}{\sigma_{q,nx}^2}\right), 0 \right\}$$
(4.34)

angepaßt. Die konstanten Korrekturwerte K_{pdf} und K_{psd} beeinflussen das Optimierungsergebnis nicht und werden daher erst nach der Optimierung berücksichtigt. Es ist nx der Teilbandindex für die horizontale Bandaufteilung. Die Varianz kann mit

$$\sigma_{s,nx}^2 = \int_{-0.5}^{0.5} S_{ss}(f_x, 0) \cdot |H_{nx}(f_x)|^2 df_x$$
(4.35)

durch numerische Integration berechnet werden. Das Optimierungskriterium $R_{TBC,x}$ wird nun durch Variation der Freiheitsgrade der Übertragungsfunktionen $H_{nx}(f_x)$ und $G_{nx}(f_x)$ der horizontalen Teilbandfilter minimiert. Die gleichförmigen Quantisierer Q_{nx} werden dabei stets so gewählt, daß sie die Irrelevanz maximal ausnutzen, so daß die Nebenbedingung

$$\underset{f_x}{Min} \left\{ S_{qq, max}(f_x, 0) - \sum_{n=0}^{\sqrt{N}-1} \frac{1}{M_{nx}} \sigma_{q, nx}^2 \left| G_{nx}(f_x) \right|^2 \right\} = 0$$
(4.36)

gilt.

Bild 4.5 zeigt beispielhaft das Blockschaltbild für die Optimierung der Übertragungsfunktionen der horizontalen Teilbandfilter mit $\sqrt{N} = 2$.



Bild 4.5 Blockschaltbild für die Optimierung der Übertragungsfunktionen der horizontalen Teilbandfilter mit $\sqrt{N} = 2$

Bei einer direkten Umsetzung dieser Minimierungsaufgabe wäre zu jedem Koeffizientensatz die Quantisierung erneut optimal auszulegen. Dies benötigt jedoch viel Rechenzeit, die durch eine abweichende Implementierung der Optimierung eingespart werden kann. Die Quantisierungsfehlervarianz in jedem Teilband wird dazu als Produkt

$$\sigma_{q,nx}^2 = a_{nx}^2 \cdot \sigma_{qx,TB}^2 \tag{4.37}$$

dargestellt, wobei a_{nx} ein teilbandindividueller Faktor und $\sigma_{qx,TB}^2$ eine für alle Teilbänder identische Quantisierungsfehlervarianz ist. Die Faktoren a_{nx} werden in die Filterkoeffizienten der Analyse– und Synthesefilterbank einbezogen. Bild 4.6 zeigt das so modifizierte zu Bild 4.5 äquivalente Blockschaltbild. Alle Quantisierer Q_{nx} besitzen hier die gleiche Stufenbreite, was durch den einheitlichen Quantisierer Q_x ausgedrückt wird. Durch diese Modifikation kann die optimale Quantisierung auf die Einstellung eines Parameters zurückgeführt werden.





Die auf diesem modifizierten Blockschaltbild aufbauende Optimierung besteht aus den im folgenden erläuterten Schritten. Zunächst wird ein Koeffizientensatz $\{k_{lx}\}^{(1)}$ bestehend aus $F_{ii,gl}$ Koeffizienten gemäß Gl. (4.16) für die Kreuzgliedfilterstruktur (Abschnitt 2.1) und eine Quantisierungsfehlervarianz $\sigma_{qx,TB}^2$ ⁽¹⁾ vorgegeben. Mit dieser Anfangsannahme wird im ersten wie auch in allen folgenden Iterationsschritten die spektrale Leistungsdichte S_{qq} des resultierenden Codierfehlers q bestimmt.

Das Beispiel in Bild 4.7 veranschaulicht, daß zu Beginn des ersten Iterationsschrittes die spektrale Leistungsdichte S_{qq} die Nebenbedingung, die Sichtbarkeitsschwelle gerade nicht zu überschreiten, in der Regel nicht erfüllt.



Bild 4.7 Spektrale Leistungsdichte $S_{qq}(f_x, 0)$ des Codierfehlers und spektrale Leistungsdichte $S_{qq,max}(f_x, 0)$ des maximal erlaubten Codierfehlers zu Beginn des ersten Iterationsschrittes (jeweils bezogen auf $S_{ss,sep,Ori}(0,0)$)

Die Quantisierungsfehlervarianz $\sigma_{qx,TB}^2$ wird nun durch Veränderung der Quantisiererstufenbreite so eingestellt, daß die spektrale Leistungsdichte S_{qq} des Codierfehlers q an oder unterhalb der spektralen Leistungsdichte $S_{qq,max}$ des maximal erlaubten Codierfehlers liegt (Bild 4.8).



Bild 4.8 Spektrale Leistungsdichte $S_{qq}(f_x, 0)$ des Codierfehlers und spektrale Leistungsdichte $S_{qq,max}(f_x, 0)$ des maximal erlaubten Codierfehlers nach dem ersten Iterationsschritt (jeweils bezogen auf $S_{ss,sep,Ori}(0,0)$)

Nach dieser Einstellung wird für den Koeffizientensatz $\{k_{lx}\}^{(1)}$ die Datenrate $R_{TBC,x}$ gemäß Gl. (4.34) bestimmt. Im zweiten Iterationsschritt wird ein zweiter Koeffizientensatz $\{k_{lx}\}^{(2)}$ über die sogenannte Direction Set Methode [35] ermittelt und der Iterationszyklus erneut durchgeführt. Dieser zweite Koeffizientensatz bestimmt sich wie alle folgenden Koeffizientensätze $\{k_{lx}\}^{(i)}$ aus dem jeweils vorangegangenen Koeffizientensatz $\{k_{lx}\}^{(i)}$ durch Addition eines Satzes von Schrittweiten $\{\Delta k_{lx}\}^{(i)}$ gemäß

$$\left\{ k_{lx} \right\}^{(i)} = \left\{ k_{lx} \right\}^{(i-1)} + \left\{ \Delta k_{lx} \right\}^{(i)}.$$
 (4.38)

Wenn sich der Wert des Optimierungskriteriums $R_{TBC,x}$ beim Übergang vom Koeffizientensatz $\{k_{lx}\}^{(i-1)}$ nach $\{k_{lx}\}^{(i)}$ nicht verringert, wird $\{k_{lx}\}^{(i)}$ gemäß Gl. (4.38) wieder verworfen und es gilt

$$\left\{k_{lx}\right\}^{(i)} = \left\{k_{lx}\right\}^{(i-1)}.$$
(4.39)

Durch dieses Vorgehen ist sichergestellt, daß sich der Wert des Optimierungskriteriums während der Optimierung nicht verschlechtert. Die Schrittweiten $\Delta k_{lx}^{(i)}$ sind im Intervall $\left[-\Delta_{max}^{(i)}, \Delta_{max}^{(i)} \right]$ gleichverteilte reellwertige Zufallszahlen.

Für die maximalen Schrittweiten $\Delta_{max}^{(i)}$ gilt hier

$$0.01 \le \Delta_{max}^{(1)} \le 1 \tag{4.40}$$

und

$$\Delta_{max}^{(i)} = \begin{cases} \frac{\Delta_{max}^{(i-1)}}{F}, & falls \ R_{TBC,x}^{(i)} = R_{TBC,x}^{(i-1)} \\ \Delta_{max}^{(i-1)}, & sonst \end{cases},$$
(4.41)

d.h. immer dann, wenn sich während *I* aufeinanderfolgenden Iterationsschritten der Wert des Optimierungskriteriums nicht verbessert, wird die maximale Schrittweite um den Faktor *F* verkleinert. Wenn die maximale Schrittweite $\Delta_{max}^{(i)}$ einen zu Beginn der Iterationen festgelegten Wert Δ_{end} unterschreitet, wird die Optimierung abgebrochen. Die Anzahl *I*, der Faktor *F* und der Wert Δ_{end} stellen dabei frei wählbare Parameter der Optimierungsstrategie dar. Sie wurden in dieser Arbeit aus den Wertebereichen

$$10 \le I \le 100,$$
 (4.42)

$$1.5 \le F \le 3 \tag{4.43}$$

und

$$0.0001 \le \Delta_{end} \le 0.01$$
 (4.44)

gewählt.

Bild 4.9 stellt die spektrale Leistungsdichte $S_{qq}(f_x, 0)$ des Codierfehlers im Vergleich zur spektralen Leistungsdichte $S_{qq,max}(f_x, 0)$ des maximal erlaubten Codierfehlers nach einer Optimierung dar. Wie Bild 4.9 zeigt, nähert sich die spektrale Leistungsdichte S_{qq} des Codierfehlers der spektralen Leistungsdichte $S_{qq,max}$ über fast den gesamten Frequenzbereich eng an.



Bild 4.9 Spektrale Leistungsdichte $S_{qq}(f_x, 0)$ des Codierfehlers und spektrale Leistungsdichte $S_{qq,max}(f_x, 0)$ des maximal erlaubten Codierfehlers nach einer Optimierung (jeweils bezogen auf $S_{ss,sep,Ori}(0,0)$)

Die Übertragungsfunktionen $H_{ny}(f_y)$ und $G_{ny}(f_y)$ der vertikalen Teilbandfilter werden entsprechend durch Optimierung eines Koeffizientensatzes $\left\{k_{ly}^{(i)}\right\}$ mit dem Optimierungskriterium $R_{TBC,y}$ bestimmt.

Diese Optimierung wurde für jede zu optimierende Filterbank mit unterschiedlichen Anfangswerten der Koeffizientensätze $\{k_{lx}\}^{(1)}$ $\{k_{ly}\}^{(1)}$ und verschiedenen Optimierungsparametern $\Delta_{max}^{(1)}$, I, F, Δ_{end} durchgeführt. Da diese Ergebnisse sich nur wenig unterscheiden, kann das Optimierungsergebnis als zuverlässig angenommen werden. Von den so ermittelten Optimierungsergebnissen wurde das System mit der kleinsten zweidimensional bestimmten Datenrate R_{TBC} gemäß Gl. (3.48) als das optimierte System ausgewählt.

4.4.2 Optimierungsergebnisse

Sowohl für Prädiktionsfehlersignale als auch für Originalsignale wurden mit der in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Optimierungsstrategie einstufig realisierte gleichförmige Bandaufteilungen mit 16, 64 und 256 Teilbandsignalen optimiert. Im folgenden werden für diese optimierten Systeme die jeweiligen Datenraten R_{TBC} gemäß Gl. (3.48) unter Einhaltung der Nebenbedingung gemäß Gl. (4.19) angegeben und untereinander verglichen.

Bild 4.10 zeigt die Datenraten R_{TBC} der optimierten Systeme als Funktion der Teilbandanzahl *N*, wenn am Eingang des Teilbandcoders Prädiktionsfehlersignale oder Originalsignale angenommen werden. Es wurden separierbare Filter mit L = 4, 8, 16 und 32 Filterkoeffizienten je Teilband optimiert. Filterbänke mit $L < \sqrt{N}$ sind nicht realisierbar, so daß bei N = 64 Teilbändern $L \ge 8$ und bei N = 256 Teilbändern $L \ge 16$ gelten muß.



Bild 4.10 Datenraten R_{TBC} der optimierten Systeme in Abhängigkeit von der Teilbandanzahl N mit der Anzahl L der Filterkoeffizienten je Teilband als Parameter, Testsequenz "BERT"

- a) Prädiktionsfehlersignale
- b) Originalsignale
 - ▲ L=4
 - ◆ L=8
 - **X** L=16
 - **+** L=32

Wie aus Bild 4.10 zu ersehen ist, sinkt bei Prädiktionsfehler– und Originalsignalen mit wachsender Koeffizientenanzahl *L* die Datenrate R_{TBC} . Zudem ist ersichtlich, daß Systeme mit einer Koeffizientenanzahl von $L = \sqrt{N}$ eine deutlich höhere Datenrate benötigen als Systeme mit einer größeren Koeffizientenanzahl. Systeme mit $L > \sqrt{N}$ sind daher vorzuziehen.

Die Datenrate R_{TBC} sinkt sowohl für Prädiktionsfehler– als auch für Originalsignale durch den Übergang von N = 16 auf N = 64 Teilbandsignale stark, während der Übergang von N = 64 auf N = 256 Teilbandsignale die Datenrate wieder geringfügig erhöht. Dieses Ergebnis stimmt mit den Erwartungen gemäß Abschnitt 4.4.1 überein. Es werden daher nur noch die optimierten Systeme mit N = 64 Teilbandsignalen näher betrachtet.

Bild 4.11 zeigt die Datenraten R_{TBC} der optimierten Systeme mit N = 64 Teilbandsignalen in Abhängigkeit von der Koeffizientenanzahl *L*.



Bild 4.11 Datenraten R_{TBC} der optimierten Systeme in Abhängigkeit von der Anzahl *L* der Filterkoeffizienten je Teilband mit N = 64 Teilbandsignalen, Testsequenz "BERT"

- a) Prädiktionsfehlersignale
- b) Originalsignale

Bild 4.11 zeigt, daß die Systeme mit L = 32 Filterkoeffizienten bei Prädiktionsfehler- und Originalsignalen die niedrigste Datenrate benötigen, die jedoch jeweils um weniger als 0.01 bit/pel unter derjenigen der Systeme mit L = 16 Filterkoeffizienten liegen. Wegen des wesentlich geringeren Aufwands aufgrund der halben Anzahl an Filterkoeffizienten wird daher sowohl für Prädiktionsfehlersignale als auch für Originalsignale von den optimierten Systemen jeweils dasjenige mit 64 Teilbandsignalen und 16 Filterkoeffizienten als das *optimale* System ausgewählt. Diese beiden Sätze von Filterkoeffizienten sowie exemplarisch die Betragsübertragungsfunktionen der für Originalsignale optimierten Horizontalfilter sind in Anhang C aufgelistet.